
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Academic Session 2008/2009

Jun 2009

JIM 317 – Differential Equations II
[Persamaan Pembezaan II]

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains SEVEN printed pages before you begin the examination.

Answer ALL questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Jawab SEMUA soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.]

1. Given differential equation

$$x^2 y'' + (x^2 + x) y' - y = 0, \quad x > 0.$$

- (a) Show that $x = 0$ is a regular singular point.

(20 marks)

- (b) Assume the form for series solution around $x = 0$ is

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Determine the root r for the indicial equation.

(35 marks)

- (c) Find two Frobenius power series solutions which are linearly independent.

(45 marks)

2. Consider the Sturm-Liouville boundary value problem

$$\frac{d}{dx} \left[(2+x)^2 \right] + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$y(-1) = 0$$

$$y(1) = 0,$$

λ is a constant.

- (a) By using the substitution $(2+x) = e^t$, show that the differential equation can be written as

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0.$$

(40 marks)

- (b) Find the eigenvalues and the eigenfunctions for the Sturm-Liouville problem

(60 marks)

...3/-

3. First order autonomous differential equation is given by

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)^2 (x+2).$$

- (a) Find all the critical points and equilibrium solutions of the equation.

(15 marks)

- (b) Sketch the graph of $\frac{dx}{dt}$ against x .

(20 marks)

- (c) Sketch the trajectories of the solutions curves for various values of the initial condition.

$$x(0) = x_0.$$

(35 marks)

- (d) Discuss the long time behavior for all the solutions and determine its stability for each equilibrium solution.

(30 marks)

4. (a) By using the substitutions $u = x - a$, $w = y - b$, classify the critical points (a, b) according to its types and stabilities.

$$\frac{dx}{dt} = x - 5y - 5$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y - 3.$$

(50 marks)

- (b) Given the following system of almost linear differential equations, find the critical points and determine its stability.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 4y - 2xy - y^2.\end{aligned}$$

(50 marks)

5. (a) Derive the Euler scheme to find the approximation solution for the initial value problem

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}$$

(30 marks)

- (b) Explain clearly the types of error arising from the Euler method.

(20 marks)

- (c) Use the Euler method with step size $h = 0.1$ to find the approximation values for the initial value problem

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 2y &= x^3 e^{-2x} \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

at $x = 0.1, 0.2$ and 0.3 .

(50 marks)

1. Diberi persamaan pembezaan

$$x^2 y'' + (x^2 + x) y' - y = 0, \quad x > 0.$$

- (a) Tunjukkan bahawa $x = 0$ adalah titik singular sekata.

(20 markah)

- (b) Andaikan bentuk penyelesaian siri kuasa di sekitar $x = 0$ adalah

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tentukan punca r bagi persamaan indeks.

(35 markah)

- (c) Cari dua penyelesaian siri kuasa Frobenius yang tak bersandar linear.

(45 markah)

2. Pertimbangkan masalah nilai sempadan Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[(2+x)^2 \right] + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$y(-1) = 0$$

$$y(1) = 0,$$

λ adalah suatu pemalar.

- (a) Dengan menggunakan penggantian $(2+x) = e^t$, tunjukkan persamaan pembezaan berkenaan dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0.$$

(40 markah)

- (b) Cari nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah Sturm-Liouville tersebut.

(60 markah)

3. Persamaan pembezaan antonomous peringkat pertama diberi oleh

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)^2(x+2).$$

- (a) Cari semua titik genting dan penyelesaian keseimbangan bagi persamaan ini.

(15 markah)

- (b) Lakarkan graf $\frac{dx}{dt}$ lawan x .

(20 markah)

- (c) Lakarkan trajektori lengkungan penyelesaian bagi pelbagai nilai syarat awal

$$x(0) = x_0.$$

(35 markah)

- (d) Bincangkan perilaku jangka panjang bagi semua penyelesaian dan tentukan kestabilan bagi setiap penyelesaian keseimbangan.

(30 markah)

4. (a) Dengan membuat penggantian $u = x - a$, $w = y - b$, kelaskan titik genting (a, b) mengikut jenis dan kestabilannya.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 5y - 5 \\ \frac{dy}{dt} &= x - y - 3.\end{aligned}$$

(50 markah)

- (b) Bagi sistem persamaan pembezaan yang hampir linear berikut, cari titik genting dan tentukan kestabilannya.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 4y - 2xy - y^2.\end{aligned}$$

(50 markah)

5. (a) Terbitkan skema Euler untuk memperolehi penyelesaian hampiran bagi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

(30 markah)

- (b) Terangkan dengan ringkas jenis ralat yang timbul dalam kaedah Euler.

(20 markah)

- (c) Guna kaedah Euler dengan saiz langkah $h = 0.1$ untuk mencari nilai hampiran bagi penyelesaian masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^3 e^{-2x}$$
$$y(0) = 1$$

di $x = 0.1, 0.2$ dan 0.3 .

(50 markah)

- oooOooo -

